TRANSACTIONS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 252, August 1979

SUR LES GERMES D'APPLICATIONS DIFFÉRENTIABLES À SINGULARITÉS ISOLÉES

BY

JACEK BOCHNAK ET WOJCIECH KUCHARZ

ABSTRACT. Le but de cet article est d'étudier les germes d'applications différentiables $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$, ou plus généralement les familles de telles applications, ayant en 0 une singularité isolée. Nous formulerons certains critères de C^0-suffisance de jets et nous démontrerons quelques théorèmes sur le nombre de types topologiques de germes qui apparaissent dans des familles de germes à singularité isolée.

1. Résultats. Le but de cet article est d'étudier les germes d'applications différentiables $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$, ou plus généralement les familles de telles applications, ayant en 0 une singularité isolée. Nous formulerons certains critères de C^0-suffisance de jets et nous démontrerons quelques théorèmes sur le nombre de types topologiques de germes qui apparaissent dans des familles de germes à singularité isolée.

I. *C^0-suffisance de jets de $J^s(n,p)$*. Notons par $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ l'espace de germes d'applications $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ de classe C^k, $k = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$, par $J^s(n,p)$ l'espace des s-jets d'applications de $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ $(k > s)$ et désignons par $j^s(f)$ le s-jet d'application f (en 0).

DÉFINITION 1. Soient f, g deux germes d'applications $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$. On dit que f et g sont *C^r-équivalent* (resp. *rl C^r-équivalent*) s'il existe un difféomorphisme local de classe C^r σ: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ (resp. un difféomorphisme τ: $(\mathbf{R}^p, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ de classe C^r) tel que $f = g \cdot \sigma$ (resp. $\tau \cdot f = g \cdot \sigma$). Si f et g sont C^0-équivalents nous dirons qu'ils ont le même *type topologique*.

DÉFINITION 2. Un s-jet $w \in J^s(n,p)$ est *C^r-suffisant dans $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$* (resp. *rl C^r-suffisant dans $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$*), $r < k < \infty$, $s < k$, si pour chaque $f_j \in \mathcal{E}_{[k]}(n,p)$, $j^s(f_j) = w$, $j = 1, 2$, f_1 est C^r-équivalent (resp. rl C^r-équivalent) à f_2.

Plusieurs auteurs ont étudié le problème de la caractérisation des jets suffisants (principalement dans le cas $p = 1$ et $r = 0$ **[3]**, **[12]**, **[14]**, $p = 1$ et $0 < r < \infty$ **[20]**, **[23]**, $p = 1$, $r = \infty$ **[11]**, **[16]**, **[23]**). Le cas $p > 1$ est beaucoup moins connu; citons néanmoins:

Received by the editors November 23, 1977.

AMS (MOS) subject classifications (1970). Primary 32C40, 57D45, 14B05.

Key words and phrases. Suffisance de jets, famille de germes différentiables à singularité isolée, partition semi-algébrique d'espace de jets, nombre de Milnor.

© 1979 American Mathematical Society
0002-9947/79/0000-0354/$05.25

Théorème (Varchenko-Thom [21], [25]). *Pour tout $w \in J^s(n,p)$, il existe $l \geqslant s$ et un ensemble algébrique $\Sigma \subset J^l(n,p)$ tels que tout jet $v \in \pi_{ls}^{-1}(w) \setminus \Sigma \neq \varnothing$ est rl C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,p)$; ($\pi_{ls}$: $J^l(n,p) \to J^s(n,p)$ désigne la projection canonique).*

Mather a montré que ce dernier résultat n'est pas valable pour la rl C^1-suffisance [18], pour certaines valeurs au moins du couple (n,p) (par exemple si $(n,p) = (15, 14)$); il reste cependant valable si $p = 1$, et même, dans ce cas, pour la C^∞-suffisance [2], [11], [23]. Le cas de la rl C^∞-suffisance a été étudiée par Mather [16] et [27]. Mather a également observé que si un jet $w \in J^s(n,p), p \geqslant 2$, est C^∞-suffisant dans $\mathcal{E}_{[\infty]}(n,p)$, alors w est C^∞-équivalent à sa partie linéaire $j^1(f)$ (par conséquence w est sans point critique à l'origine) [17].

Pour la C^0-suffisance la situation est différente. Pour un système $u_1, \ldots, u_p$ de p vecteurs de $\mathbf{R}^n$ notons [13] par

$$d(u_1, \ldots, u_p) = \min_j \left\{ \operatorname{dist}\left(u_j, \sum_{i \neq j} \mathbf{R} u_i \right) \right\},$$

où $\operatorname{dist}(u_j, \sum_{i \neq j} \mathbf{R} u_i)$ désigne la distance entre u_j et le sous-espace vectoriel $\sum_{i \neq j} \mathbf{R} u_i$ de $\mathbf{R}^n$ engendré par u_i, $i \neq j$.

Théorème 1. *Pour un r-jet $w \in J^r(n,p)$, $n \geqslant p$, $j^1(w) = 0$, $r < \infty$, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *w est C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$;*

(a′) *w est rl C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$ et $0 \in \mathbf{R}^n$ est un point critique isolé de w;*

(b) $\exists c, \alpha > 0$ *tels que* $d(\operatorname{grad} w_1(x), \ldots, \operatorname{grad} w_p(x)) \geqslant c|x|^{r-1}$ *pour* $|x| < \alpha$;

(c) $\forall f \in \mathcal{E}_{[r]}(n,p), j^r(f) = w$, $0 \in \mathbf{R}^n$ *est un point critique isolé de f.*

Corollaire 1. *L'ensemble de r-jets C^0-suffisants dans $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$ est un ensemble semi-algébrique de $J^r(n,p)$.*

Remarques. (1) Pour $p = 1$, $d(\operatorname{grad} w_1(x)) = |\operatorname{grad} w_1(x)|$ et dans ce cas l'équivalence (a)$\Leftrightarrow$(b) a été démontrée dans [3], [12], [14]; dans ce cas la C^0-suffisance est équivalente à la v-suffisance [3]. Rappelons que $w \in J^r(n,p)$ est *v-suffisant dans* $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$ si pour tout $f \in \mathcal{E}_{[k]}(n,p), j^r(f) = w$, les germes (en $0 \in \mathbf{R}^n$) d'ensembles $w^{-1}(0)$ et $f^1(0)$ sont homéomorphes. Il est facile de voir que pour $p \geqslant 2$ les notions de v-suffisance et de C^0-suffisance ne sont plus équivalentes: $w = (x, y^3) \in J^3(2, 2)$ est v-suffisant dans $\mathcal{E}_{[3]}(2, 2)$ mais n'est pas C^0-suffisant. La v-suffisance des jets de $J^r(n,p)$ a été étudié par T. C. Kuo [13].

(2) Nous verrons plus tard que si $w \in J^s(n,p)$ est C^0-suffisant, alors $n \geqslant p$.

(3) Pour les germes d'applications analytiques $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ ayant en

$0 \in \mathbf{R}^n$ une singularité isolée, les notions de C^0-équivalence et de rl C^0-équivalence sont très voisines: King [9] a montré que deux tels germes f et g sont rl C^0-équivalents si et seulement si, ou bien ils sont C^0-équivalents, ou bien f et $\bar{g}$ sont C^0-équivalents (où $\bar{g}(x) = (-g_1(x), \ldots, g_p(x))$). En fait ce résultat est valable aussi pour les applications qui ne sont pas nécessairement analytiques, mais dont les variétés des zéros $f^{-1}(0)$ satisfont certaines propriétés coniques; par contre l'hypothèse que 0 est un point critique isolé est essentielle.

II. *C^0-suffisance de jets complexes*. Notons $J^r_{\mathbf{C}}(n, p)$ l'espace de r jets complexes d'applications holomorphes $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^p, 0)$, $\mathcal{H}(n)$ l'anneau de germes (en $0 \in \mathbf{C}^n$) de fonctions holomorphes $(\mathbf{C}^n, 0) \to \mathbf{C}$. On définit de façon évidente la *C^0-suffisance d'un jet complexe dans* $\mathcal{H}(n)$ (comparez la Définition 1).

On peut observer que, pour $p \geqslant 2$, un jet $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, p)$ est C^0-suffisant si et seulement si $0 \in \mathbf{C}^n$ est un point régulier de w; par conséquent, nous allons nous occuper uniquement du cas $p = 1$.

DÉFINITION 3. Un jet $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$ est *strictement v-suffisant dans* $\mathcal{H}(n)$ si pour tout germe holomorphe $f \in \mathcal{H}(n), j^r(f) = w$, les germes (en $0 \in \mathbf{C}^n$) des variétés $f^{-1}(0)$ et $w^{-1}(0)$ sont topologiquement équivalentes i.e. s'il existe un homéomorphisme local σ: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$, tel que $\sigma(w^{-1}(0)) = f^{-1}(0)$; (nous disons également que $f^{-1}(0)$ et $w^{-1}(0)$ ont même *type topologique*).

Pour $f \in \mathcal{H}(n)$ désignons par $\mu(f)$ *le nombre de Milnor de* f i.e. la dimension d'espace vectoriel (sur $\mathbf{C}$) $\dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}(n)/(\partial f/\partial z_1, \ldots, \partial f/\partial z_n)$. Rappelons que $\mu(f) < \infty$ si et seulement si $0 \in \mathbf{C}^n$ est un point critique isolé de f et que $\mu(f)$ est également le degré d'application

$$S_\varepsilon = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| = \varepsilon\} \ni z \to \operatorname{grad} f(z)/|\operatorname{grad} f(z)| \in S_1;$$

$\varepsilon > 0$ suffisamment petit.

THÉORÈME 2. *Pour un jet complexe* $w \in J^n_{\mathbf{C}}(n, 1)$ *les conditions suivantes sont équivalentes*:

(a) *w est strictement v-suffisant dans* $\mathcal{H}(n)$;

(b) *w est C^0-suffisant dans* $\mathcal{H}(n)$;

(c) $\forall f \in \mathcal{H}(n)$ *tel que* $j^r(f) = w$, *on a* $\mu(f) = \mu(w)$;

(c') $\forall f \in J^{r+1}_{\mathbf{C}}(n, 1)$ *tel que* $j^r(f) = w$, *on a* $\mu(f) = \mu(w)$;

(d) $\exists c, \delta, \alpha > 0$ *tels que* $|\operatorname{grad} w(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$ *pour* $|x| \leqslant \alpha$.

REMARQUE 4. L'implication (d) $\Rightarrow$ (b) a été démontrée dans [6].

COROLLAIRE 2. *L'ensemble de r-jets complexes C^0-suffisants dans* $\mathcal{H}(n)$ *est constructible* (*en tant que sous-ensemble de* $J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$).

H. King a montré le résultat suivant:

THÉORÈME (KING [9]). *Si* $f_i \in \mathcal{H}(n)$, $n \neq 3$, $\mu(f_i) < \infty$, $i = 1, 2$, *et si les variétés* $f_i^{-1}(0)$ *ont le même type topologique, alors* f_1 *et* f_2 *sont rl* C^0*-équivalentes.*

Notons $\mathcal{H}_l(n) = \{f \in \mathcal{H}(n)\colon \mu(f) = l\}$, $l \in \mathbf{N}$.

THÉORÈME 3. *Le nombre des types topologiques différents qui apparaissent dans la famille* $\mathcal{H}_l(n)$ *est fini et inférieur à un nombre* $\gamma(n, l)$, *où le nombre* $\gamma(n, l)$ *est explicitement calculable en fonction de n et l.*

Il résulte du Théorème 3 que, même si le théorème de King est faux pour $n = 3$ (ce qui n'est pas prouvé), il n'y a qu'un nombre fini ($\leqslant \gamma(n, l)$) des germes holomorphes à singularité isolée $f_1, \ldots, f_{\gamma(n,l)}$ dont les variétés de zéros $f_i^{-1}(0)$ ont le même type topologique et qui sont topologiquement non équivalentes (l désigne le nombre de Milnor de la variété $f_i^{-1}(0)$).

III. *Famille des germes à singularité isolée.*

DÉFINITION 4. (a) Une famille $\{f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t\in U}$ de germes est *de classe* C^r ($r = 0, 1, \ldots, \infty, \omega$; U une variété de classe C^r si $r \geqslant 1$ ou un espace topologique si $r = 0$), s'il existe un voisinage W de $0 \in \mathbf{R}^n$ et une application $\varphi\colon (U \times W, U \times \{0\}) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ de classe C^r, tels que pour tout $t \in U$, les germes (en $0 \in \mathbf{R}^n$) φ_t et f_t sont égaux; $\varphi_t(x) = \varphi(t, x)$, $(t, x) \in U \times W$.

(b) Une famille $\{f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t\in U}$ des germes est *localement triviale* si pour tout $t_0 \in U$, il existe un voisinage U_0 de t_0 et une famille continue des homéomorphismes locaux $\{\sigma_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)\}_{t\in U_0}$ tels que $f_t \cdot \sigma_t = f_{t_0}$, $t \in U_0$.

Si U est connexe et la famille $\{f_t\}_{t\in U}$ est localement triviale, toutes les f_t ont le même type topologique, la réciproque étant fausse: $\{f_t = x^5 + tx^3\}_{t\in\mathbf{R}}$ est une famille qui n'est pas localement triviale mais chaque f_t est topologiquement équivalent à x^3.

Le travail de King [10] contient toute une série de résultats remarquables sur les propriétés topologiques de familles $\{f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t\in U}$ des germes d'applications différentiables à singularités isolées en $0 \in \mathbf{R}^n$. Nous utiliserons ces résultats pour démontrer le théorème suivant. Notons par $J^s_\Sigma(n, p)$ le sous-ensemble de s-jets de $J^s(n, p)$ ayant en $0 \in \mathbf{R}$ un point critique isolé.

THÉORÈME 4. *Il existe une partition finie de* $J^s_\Sigma(n, p) = V_1 \cup \cdots \cup V_{\beta(n,p;s)}$ *telle que*

(a) *chaque* V_j *est une sous-variété analytique connexe et semi-algébrique dans* $J^s(n, p)$;

(b) *pour tout* $1 \leqslant j \leqslant \beta(n, p; s)$ *la famille des germes d'applications*

$$\{v\colon (\mathbf{R}^n, 0) \ni x \to v(x) \in (\mathbf{R}^p, 0)\}_{v \in V_j}$$

est localement triviale;

(c) *de plus, on peut exprimer le nombre $\beta(n, p;\ s)$ de façon effective en fonction de n, p et s.*

REMARQUE 5. T. Fukuda [7] a montré que pour s et n fixés, le nombre de rl types topologiques de germes dans $J^s(n, 1)$ est fini. La question analogue pour $J^s(n, p), p \geqslant 2$, n'est pas résolue.

DÉFINITION 5. On dit qu'une famille de germes d'applications de classe C^r $(0 \leqslant r \leqslant \omega)$ $\{f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t \in U}$ *appartient à* $\mathcal{E}^r_*(n, p;\ k)$, $(k < \infty)$, U étant un voisinage de $0 \in \mathbf{R}^l$, s'il existe $c, \alpha > 0$ tels que pour tout $t \in U$ et $|x| \leqslant \alpha$

$$d(\operatorname{grad} f_{t,1}(x), \ldots, \operatorname{grad} f_{t,p}(x)) \geqslant c|x|^{k-1}.$$

THÉORÈME 5. *Pour tout triplet d'entiers positif n, p, s il existe un système universel d'applications polynômiales $\{P_i\}_{1 \leqslant i \leqslant \beta(n,p;s)}$, $P_i \in J^s_\Sigma(n, p)$, de sorte que pour toute famille $\{f_t\}_{t \in U} \in \mathcal{E}^s_*(n, p;\ s)$ (resp. $\{f_t\}_{\in U} \in \mathcal{E}^\omega_*(n, p;\ s)$) il existe un voisinage $U' \subset U$ de $0 \in \mathbf{R}^l$ et une partition finie $U' = W_1 \cup \cdots \cup W_{\beta(n,p;s)}$ tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant \beta(n, p;\ s)$*

(1) *W_i est localement fermé dans $\mathbf{R}^l$ (resp. W_i est semi-analytique dans $\mathbf{R}^l$);*

(2) *la famille $\{f_t\}_{t \in W_i}$ est localement triviale;*

(3) *$\forall t \in W_i$, f_t est topologiquement équivalent au germe (en $0 \in \mathbf{R}^n$) du polynôme P_i.*

REMARQUE 6. Le nombre $\beta(n, p;\ s)$ du Théorème 5 est celui qui est apparu dans l'énoncé du Théorème 4.

H. King [10] a construit un exemple surprenant d'une famille polynômiale $f_t\colon \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$, $t \in \mathbf{R}$, $k \geqslant 5$, telle que pour chaque valeur t le polynôme n'ait qu'un seul point critique (en $0 \in \mathbf{R}^k$), et telle que le type topologique du germe (en 0) change. Il a montré aussi qu'un tel phénomène est impossible si on considère les polynômes complexes (sauf éventuellement pour $k = 3$), ainsi que dans le cas réel si $k \leqslant 3$. Le Théorème 4 montre que le nombre de changements du type topologique dans une famille de germes polynômiale (à singularité isolée), ne peut être arbitrairement grand.

Terminons cette section par une remarque sur l'existence de germes d'applications analytiques ou (ce qui revient au même) d'applications polynômiales à singularité isolée et qui sont topologiquement non équivalentes. D'après les Théorèmes 1 et 4 pour (n, p) fixé, l'ensemble maximal de germes d'applications analytiques $f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)$, ayant en 0 une singularité isolée et dont le type topologique est différent pour deux valeurs distinctes du paramètre t, est au plus dénombrable. Il est facile de voir que pour $p = 1$ ou $(n, p) = (2k, 2)$ un tel ensemble est effectivement infini (donc dénombrable).

Ceci est vrai aussi si $n - p \geqslant 4$ (Church and Lamotke [5]), mais n'est pas évident.

Par contre, tout germe d'application analytique $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^{n-1}, 0)$, $n \geqslant 5$, à singularité isolée est trivial i.e. rl topologiquement équivalent à la projection linéaire $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^{n-1}$. Il est extrêmement difficile de décider s'il existe un exemple non trivial de polynôme P: $\mathbf{R}^9 \to \mathbf{R}^6$ à singularité isolée en 0 (en réalité la non-existence d'un tel polynôme est équivalente à la conjecture de Poincaré [5]).

2. Problèmes ouverts.

Conjecture 1. Pour un jet $w \in J^r(n,p)$ et $k = r + 1, \ldots, \infty, w$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) w est C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[k]}(n,p)$;

(b) $\exists c, \alpha, \delta > 0$ tels que $d(\text{grad } w_1(x), \ldots, \text{grad } w_p(x)) \geqslant c|x|^{r-\delta}$ pour $|x| < \alpha$.

La Conjecture 1 est vraie pour $k = r + 1$ (voir [3] pour $p = 1$ et le §3 de cet article pour $p > 1$).

L'implication (b) $\Rightarrow$ (a) résulte de la Remarque 8(b) du §3.

Conjecture 2. Il n'existe qu'un nombre fini des germes d'applications analytiques $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}, 0)$ topologiquement non équivalents, ayant une singularité isolée en 0, et dont le type topologique des germes (en 0) de variétés des zéros est le même.

King a montré que si $n \leqslant 3$, le type topologique de la variété des zéros d'un germe de fonction analytique f à singularité isolée, détermine entièrement le rl type topologique de f, et que ceci est faux pour $n \geqslant 7$ ([8], [9]).

3. Démonstration du Théorème 1.

PROPOSITION 1. *Soit* $\{f_t\colon (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t \in U}$ *une famille appartenant à* $\mathcal{E}^r_*(n,p;\, r)$. *Alors il existe* $\alpha' > 0$ *et une famille continue d'homéomorphismes locaux* σ_t: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, $|t| \leqslant \alpha'$, *tels que* $f_t \cdot \sigma_t = j^r(f_t)$.

PREUVE. Notons $z_t = j^r(f_t)$ et considérons la famille

$$F_t(x, u) = z_t(x) + u(f_t(x) - z_t(x)),$$
$$(t, x, u) \in U \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \subset \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}.$$

Nous allons définir un système d'équations différentielles (dépendant du paramètre t)

$$dx/d\tau = p_t(x, u), \tag{$*$}$$

où $p_t(x, u)$ est une application définie pour (t, x, u) appartenant à un ouvert de $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$ contenant $B^l_\varepsilon \times B^n_\varepsilon \times [0, 1]$, à valeurs dans $\mathbf{R}^{n+1}$; $B^k_\varepsilon = \{x \in \mathbf{R}^k\colon |x| \leqslant \varepsilon\}$. Ensuite nous allons montrer qu'il existe une application continue η: $W \to \mathbf{R}^{n+1}$ définie dans un voisinage W de $B_\varepsilon^l \times B_\varepsilon^n \times [0, 1] \times \{0\} \subset \mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$, telle que pour tout $(t, x, u) \in B_\varepsilon^l \times B_\varepsilon^n \times [0, 1]$ on a

(1) l'application $\{\tau \in \mathbf{R}$: $(t, x, u, \tau) \in W\} \ni \tau \to \eta(t, x, u, \tau) \in \mathbf{R}^{n+1}$ est l'unique solution de l'équation $(*)$ satisfaisant la condition initiale $\eta(t, x, u; 0) = (x, u)$;

(2) $\eta(t, 0, 0; \tau) = (0, \tau)$;

(3) $\eta((\{t, x, 0\} \times \mathbf{R}) \cap W) \cap (\mathbf{R}^n \times \{1\})$ contient précisément un seul point, qu'on note $(\sigma_t(x), 1)$;

(4) F_t est constante sur $\eta((\{t, x, u\} \times \mathbf{R}) \cap W)$.

Il est facile de vérifier que la famille $B_\varepsilon^l \times B_\varepsilon^n \ni (t, x) \to \sigma_t(x) \in \mathbf{R}^n$ est une famille continue cherchée des homéomorphismes locaux. En effet, l'unicité des solutions assurée par (1) implique que σ_t est une application injective. Puisque $\sigma_t(0) = 0$ (d'après (2)) et σ_t est continue, donc σ_t est un homéomorphisme local $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ qui dépend de façon continue de $t \in B_\varepsilon^l$.

Par construction, pour un t fixé, $(x, 0)$ et $(\sigma_t(x), 1)$ sont dans $\eta((\{t, x, 0\} \times \mathbf{R}) \cap W)$, donc d'après (4) $z_t(x) = F_t(x, 0) = F_t(\sigma_t(x), 1) = f_t(\sigma_t(x))$.

Il suffit donc de définir le système $(*)$ dont les solutions ont les propriétés (1)–(4). Nous allons définir $p_t(x, u)$ par une construction analogue à celle utilisée par T. C. Kuo [13] dans ses études sur la v-suffisance de jets.

Notons par Δ l'opérateur $\Delta = (\partial/\partial x_1, \ldots, \partial/\partial x_n, \partial/\partial u)$. Le fait que $\{f_t\}_{t \in U} \in \mathcal{E}_*^r(n, p; r)$ implique comme dans [13, Lemme 4.3], que pour un $\alpha > 0$,

$$d(\Delta F_{t,1}(x, u), \ldots, \Delta F_{t,p}(x, u)) \geqslant c|x|^{r-1}/2, \tag{5}$$

pour $0 \leqslant |x| < \alpha$, $0 \leqslant |t| < \alpha$, $0 \leqslant u \leqslant 1$; (rappelons que pour $a_i \in \mathbf{R}^{n+1}$, $d(a_1, \ldots, a_p)$ désigne le minimum des $\operatorname{dist}(a_j, \sum_{k \neq j} \mathbf{R} a_k)$; $j = 1, \ldots, p$).

Soit $N_{t,i}(x, u)$ le vecteur de $\mathbf{R}^{n+1}$, tel que $\Delta F_{t,i} - N_{t,i}$ soit la projection de $\Delta F_{t,i}(x, u)$ sur l'espace engendré par les $\Delta F_{t,j}(x, u), j \neq i$, et posons

$$X_t(x, u) = \sum_{i=1}^{p} \langle e_{n+1}, \Delta F_{t,i}(x, u)\rangle |N_{t,i}(x, u)|^{-2} N_{t,i}(x, u)$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ désigne le produit scalaire et $e_{n+1} = (0, \ldots, 0, 1) \in \mathbf{R}^{n+1}$.

(Observons que $X_t(x, u)$ est une projection orthogonale de e_{n+1} sur l'espace engendré par $\Delta F_{t,i}(x, u)$, $i = 1, \ldots, p$.) Mettons

$$p_t(x, u) = \begin{cases} e_{n+1} - X_t(x, u) & \text{pour } 0 < |x| < \delta,\ |t| < \alpha,\ u \in \mathbf{R}, \\ e_{n+1} & \text{pour } x = 0,\ |t| < \alpha,\ u \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

Remarquons que pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, on a

(i) $p_t(x, u)$ est continue pour $(t, x, u) \in B_\varepsilon^l \times B_\varepsilon^n \times [0, 2] = A_\varepsilon$ et de classe C^{r-1} pour $x \neq 0$.

(ii) $\lim_{x\to 0}\{|p_t(x, u) - p_t(0, u)|/|x|\} = 0$ uniformément par rapport à $(t, u) \in B_\varepsilon^l \times [0, 2]$.

(iii) $\langle p_t(x, u), e_{n+1}\rangle > 0$ pour $(t, x, u) \in A_\varepsilon$.

En effet, puisque d'après (5),

$$|N_{t,i}| \geqslant d(\Delta F_{t,1}, \ldots, \Delta F_{t,p}) \geqslant (c/2)|x|^{r-1}, \qquad i = 1, \ldots, p,$$

on a

$$|X_t(x, u)| \leqslant 2\sum_{i=1}^{p} |f_{t,i} - z_{t,i}|\frac{1}{|N_{t,i}|} = o(|x|),$$

d'où (i)–(iii).

La solution $\eta(t, x, u; \tau)$ de (*) satisfaisant $\eta(t, x, u; 0) = (x, u)$ existe et est unique pour tout $(t, x, u) \in A_\varepsilon$ et dépend de façon continue de t, x, u. L'existence et l'unicité en dehors de $B_\varepsilon^l \times \{0\} \times [0, 2]$ résulte du théorème classique de Peano. Pour $(t, 0, u)$ la solution est donnée par la formule $\mathbf{R} \ni \tau \to (0, u + \tau) \in \{0\} \times \mathbf{R}$; l'unicité de la solution passant par $(t, 0, u)$ et sa continuité au voisinage de $(t, 0, u)$ sont assurées par les conditions (i) et (ii) (voir [**13**, p. 121] pour plus de détails).

$\eta(t, x, u; \tau)$ est définie dans un ouvert W de $\mathbf{R}^l \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ contenant $A_\varepsilon \times \{0\}$. η vérifie évidemment la condition (2). Quitte à prendre $\varepsilon > 0$ plus petit, la condition (3) résulte de (iii), de la condition (2) et de la continuité de η.

Pour vérifier (4) il suffit de voir que $(d/d\tau)F_{t,k}(\eta(t, x, u; \tau)) = 0$, $k = 1, \ldots, p$. Ceci est évident si $x = 0$. Supposons donc $x \neq 0$ et calculons

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}F_{t,k}(\eta(t, x, u; \tau)) &= \frac{\partial F_{t,k}}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial \eta_1}{\partial \tau} + \cdots + \frac{\partial F_{t,k}}{\partial x_n}\cdot\frac{\partial \eta_n}{\partial \tau} + \frac{\partial F_{t,k}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \eta_{n+1}}{\partial \tau}\\
&= \langle \Delta F_{t,k}, p_t\rangle = \langle \Delta F_{t,k}, e_{n+1} - X_t(x, u)\rangle\\
&= \left\langle \Delta F_{t,k}, e_{n+1} - \sum_{i=1}^{p} (f_{t,i} - z_{t,i})|N_{t,i}|^{-2}N_{t,i}\right\rangle\\
&= (f_{t,k} - z_{t,k}) - (f_{t,k} - z_{t,k})|N_{t,k}|^{-2}\langle \Delta F_{t,k}, N_{t,k}\rangle = 0
\end{aligned}$$

puisque $\langle \Delta F_{t,k}\, N_{t,j}\rangle = |N_{t,k}|^2$ si $j = k$ et 0 si $j \neq k$.

Remarque 7. (a) Il résulte de la démonstration de la Proposition 1 que chaque homéomorphisme σ_t est de classe C^{r-1} en dehors de l'origine (appelons un tel homéomorphisme $C^{0,r-1}$ difféomorphisme).

(b) La conclusion de la Proposition 1 reste valable si, au lieu de supposer que $\{f_t\}$ est de classe C^r et $d(\operatorname{grad} f_{t,1}(x), \ldots, \operatorname{grad} f_{t,p}(x)) \geqslant c|x|^{r-1}$, nous supposions que $\{f_t\}$ est de classe C^k, $k \geqslant r + 1$, et $d(\operatorname{grad} f_{t,1}(x), \ldots, \operatorname{grad} f_{t,p}(x)) \geqslant c|x|^{r-\delta}$, pour $|x| \leqslant \alpha$, $|t| \leqslant \alpha$; $c, \delta > 0$. La démonstration que nous venons de donner s'adapte facilement à cette situation.

Nous pouvons démontrer maintenant le Théorème 1.

Considérons deux conditions auxiliaires:

(a″) $w \in J^r(n,p)$ est $C^{0,r-1}$-suffisant dans $\mathcal{E}_{[r]}(n,p)$;

(d) pour toute fonction f: $U \to \mathbf{R}^p$ de classe C^r au voisinage U de $0 \in \mathbf{R}^n$, $j^r(f) = w$, et toute suite $\{a_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ d'éléments de $\mathbf{R}^n$, $a_i \to 0$, $i \to \infty$, $a_i \neq 0$, soit l'ensemble $f^{-1}(f(a_i))$ est une variété topologique de codimension p au voisinage de a_i (si $n > p$), soit f est injective au voisinage de a_i (si $n = p$), pour tout i suffisamment grand.

Montrons que les conditions (a), (a′), (a″), (b), (c) et (d) sont équivalentes.

Démontrons d'abord (a) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (a″) $\Rightarrow$ (a).

Le lemme suivant est une conséquence conne du théorème de Sard [22, §7, Corollaire 1.7]:

LEMME 1. *Soient $U \subset \mathbf{R}^l$, $V \subset \mathbf{R}^k$ les ouverts non vides, F: $U \times V \to \mathbf{R}^p$ une application de classe C^∞ et B un sous-ensemble dénombrable de $\mathbf{R}^p$ contenu dans l'ensemble des valeurs régulières de F. Alors l'ensemble*

$$A = \big\{ y \in V \colon B \textit{ est contenu dans l'ensemble des valeurs régulières de } F_y \colon U \ni x \to F(x,y) \big\}$$

est résiduel dans V.

(a) $\Rightarrow$ (d). Soient $a_i \to_{i\to\infty} 0$, $a_i \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^p$ une fonction de classe C^r, $j^r(f) = w$. Considérons l'application F: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^p \to \mathbf{R}^p$, $F_j(x,y) = w_j(x) + y_j|x|^{2r}$, $j = 1, \ldots, p$. F restreint à $(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^p$ est une submersion et $\{f(a_i)\}$ est une suite des valeurs régulières de $F|(\mathbf{R}^n \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^p$. Choisissons, d'après le Lemme 1, $y \in \mathbf{R}^p$, pour lequel $\{f(a_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$ est une suite des valeurs régulières de $F_y|\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$.

Notons $g = F_y$ et observons que $j^r(g) = w$. Donc d'après (a), pour un homéomorphisme local σ: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$ on a $g \cdot \sigma = f$. Cela implique que $f^{-1}(f(a_i)) = \sigma^{-1}(g^{-1}(f(a_i)))$ est une variété topologique de codimension p au voisinage de a_i (pour $i \geqslant i_0$), en tant qu'image par σ^{-1} d'une sous-variété lisse $g^{-1}(f(a_i))$ de $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ et, si $n = p$, que f est injective au voisinage de a_i.

COROLLAIRE 3. *Si $w \in J^r(n,p)$ est C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[\omega]}(n,p)$, alors $n \geqslant p$.*

(d) $\Rightarrow$ (b). Supposons $p \geqslant 2$ (le cas $p = 1$ a été déjà considéré dans [3]). Admettons par l'absurde que la condition (b) n'est pas satisfaite. Sans perte de généralité on peut supposer que pour une suite $a_i \to 0$, $|a_{i+1}| < \frac{1}{2}|a_i|$,

$$\begin{aligned} \delta_i &= \operatorname{dist}\left(\operatorname{grad} w_1(a_i), \sum_{j=2}^{p} \mathbf{R} \operatorname{grad} w_j(a_i)\right) \\ &= d\big(\operatorname{grad} w_1(a_i), \ldots, \operatorname{grad} w_p(a_i)\big) = o\big(|a_i|^{r-1}\big). \end{aligned}$$

Choisissons pour chaque $i \in \mathbf{N}$ les $\lambda_i^{(2)}, \ldots, \lambda_i^{(p)} \in \mathbf{R}^n$ tels que

(i) $|\lambda_i^{(k)}| = o(|a|^{r-1})$, $k = 2, \ldots, p$;

(ii) grad $w_2(a_i) + \lambda_i^{(2)}, \ldots,$ grad $w_p(a_i) + \lambda_i^{(p)}$ sont linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^n$;

(iii) grad $w_1(a_i) \in \Sigma_{j=2}^p \mathbf{R}(\text{grad } w_j(a_i) + \lambda_i^{(j)})$.

Un tel choix des $\lambda_i^{(j)}$ est possible, d'après le Lemme 1 [4].

Prenons $\psi\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ une fonction C^∞, $\psi(x) = 1$ pour $|x| < \frac{1}{8}$ et $\psi(x) = 0$ pour $|x| > \frac{1}{4}$ et posons

$$\eta_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x - a_i}{|a_i|}\right)\varepsilon_i |x - a_i|^2, \qquad \varepsilon_i > 0,$$

$$\eta_k(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \psi\left(\frac{x - a_i}{|a_i|}\right)\langle \lambda_i^{(k)}, x - a_i \rangle, \qquad k = 2, \ldots, p.$$

Le choix de $\varepsilon_i > 0$ sera décidé plus tard. Posons $g = w + \eta$ et observons que si $\varepsilon_i = o(|a_i|^{r-1})$, alors $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_p)$ est de classe C^r, que $j^r(g) = w$ et que $g(a_i) = w(a_i)$.

Nous allons montrer qu'on peut choisir $\varepsilon_i = o(|x|^{r-1})$ de telle façon que $g^{-1}(g(a_i))$ ne soit pas une variété topologique de codimension p au voisinage de a_i (pour $n > p$), ou g ne soit pas injective (pour $n = p$), ce qui contredirait (d).

Observons que d'après (ii), au voisinage W_i (suffisamment petit) de a_i, l'ensemble $M_i = \{x \in W_i\colon\ w_j(x) + \eta_j(x) = w_j(a_i),\ j = 2, \ldots, p\}$ est une variété différentiable de codim $p - 1$.

D'après (iii), pour un choix convenable des $\xi_{k,i} \in \mathbf{R}$,

$$\text{grad } w_1(a_i) = \sum_{k=2}^{p} \xi_{ki}\big(\text{grad } w_k(a_i) + \lambda_i^{(k)}\big).$$

Choisissons $\varepsilon_i = o(|a_i|^{r-1})$ de telle manière que chaque a_i soit un point critique non-dégénéré de la restriction à M_i de la fonction $h = g_1 - \Sigma_{k=2}^p \xi_{ki} g_k$.

Remarquons que a_i est un point critique de h, puisque

$$\text{grad } h(a_i) = \text{grad } g_1(a_i) - \sum_{k=2}^{p} \xi_{ki} \text{ grad } g_k(a_i) = 0.$$

Considérons l'ensemble

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(a_i)) \cap W_i &= \{x \in W_i\colon w_j(x) + \eta_j(x) = w_j(a_i), j = 1, \ldots, p\} \\ &= \{x \in M_i\colon h(x) = h(a_i)\}. \qquad (**) \end{aligned}$$

Grâce au choix de ε_i, l'ensemble (**) est donc (à un changement de coordonnées près) le lieu d'une forme quadratique non-dégénérée. Cela implique que si (**) est une variété topologique, alors nécessairement (**) se réduit à un point $\{a_i\}$. Par conséquent si $n - p > 1$, (**) n'est pas une variété topologique de codim p. Si $n = p$, et $x \in M_i$, $g(x) = (h(x), 0)$ d'où g n'est pas injective, puisque $h|_{M_i}$ ne l'est pas.

(b) $\Rightarrow$ (a″) résulte de la Proposition 1 et de la Remarque 7(a) et (a″) $\Rightarrow$ (a) est trivial. Il reste à voir que (d) $\Leftrightarrow$ (c) et (a) $\Leftrightarrow$ (a′) ce qui résulte des implications suivantes qui sont soit triviales soit déjà démontrées: (d) $\Rightarrow$ (b) $\wedge$ (a″) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (d), (a) $\Rightarrow$ (a′) $\Rightarrow$ (d) $\Rightarrow$ (a).

DÉMONSTRATION DE LA CONJECTURE 1 POUR $k = r + 1$. (b) $\Rightarrow$ (a) résulte de la Proposition 1 et de la Remarque 7(b).

(a) $\Rightarrow$ (b) chaque composante w_i, $i = 1, \dots, p$, du jet w est C^0-suffisante dans $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, 1)$. Cela implique, d'après le Théorème 3 [3], que $|\text{grad}\, w_i(x)| \geqslant c|x|^{r-\delta}$, avec $c, \delta > 0$, pour $|x|$ petits. Puisque w, considéré comme $(r + 1)$-jet, est évidemment C^0-suffisant dans $\mathcal{E}_{[r+1]}(n, p)$, alors d'après le Théorème 1, les p vecteurs grad $w_i(x)$, $i = 1, \dots, p$, sont linéairement indépendants dans $\mathbf{R}^n$, pour chaque valeur $x \neq 0$, $|x| \leqslant \alpha$. Ces deux informations permettent facilement de démontrer la condition (a) de la Conjecture 1.

4. Démonstration du Théorème 2. (c′) $\Rightarrow$ (d). Pour démontrer cette implication, nous aurons besoin des deux lemmes suivants, dont les démonstrations se trouvent dans [3, p. 259 et 260] (plus précisément on y trouve la preuve dans le cas réel, mais le principe de la démonstration est le même pour le cas complexe).

Identifions l'espace des polynômes homogènes de n variables complexes de degré $r + 1$ avec l'espace affine $\mathbf{C}^N$, et pour $a = (a_\alpha) \in \mathbf{C}^N$ notons $H_a(z) = \sum_{|\alpha|=r+1} a_\alpha z^\alpha$ le polynôme correspondant.

LEMME 2 [3]. *Soient $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$ et B une boule dans $\mathbf{C}^N$. Supposons que pour un $\varepsilon > 0$ et tout $a \in B$,* $\text{grad}(w + H_a)(x) \neq 0$, *quel que soit* $0 < |z| < \varepsilon$. *Alors pour tout $a \in B$ il existe $c_a > 0$ et $\alpha_a > 0$ tels que* $|\text{grad}(w + H_a)(z)| \geqslant c_a|z|^r$ *pour* $|z| < \alpha_a$.

LEMME 3 [3]. *Soit $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$. Supposons que pour tout $a \in \mathbf{C}^N$ il existe $c_a > 0$, $\alpha_a > 0$ tels que* $|\text{grad}(w + H_a)(z)| \geqslant c_a|z|^r$ *pour* $|z| < \alpha_a$. *Alors il existe $c, \alpha, \delta > 0$ tels que* $|\text{grad}\, w(z)| \geqslant c|z|^{r-\delta}$ *si* $|z| < \alpha$.

Démontrons maintenant (c′) $\Rightarrow$ (d). La condition (c′) implique que $\mu(w) < \infty$, puisque pour un $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$ fixé, $\mu(w + H_a) < \infty$ pour presque tout $a \in \mathbf{C}^N$.

D'après les Lemmes 2 et 3 il suffit de montrer que (c′) implique que pour tout $a_0 \in \mathbf{C}^N$ et toute boule $B_d(a_0)$ de $\mathbf{C}^N$ de centre a_0 et de rayon suffisamment petit d, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\text{grad}(w + H_a)(z) \neq 0$ pour tout $a \in B_d(a_0)$ et tout z, $0 < |z| < \varepsilon$.

Choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $0 \in \mathbf{C}^n$ soit le seul point critique de $w + H_{a_0}$ dans la boule $|z| < \varepsilon$ et prenons $d > 0$ tel que $\text{grad}(w + H_a)(z) \neq 0$ pour $|z| = \varepsilon$ et

$a \in B_d(a_0)$. Par construction, pour chaque $a \in B_d(a_0)$, l'ensemble $\{z \in \mathbf{C}^n: \operatorname{grad}(w + H_a)(z) = 0, |z| < \varepsilon\}$ est fini. Le nombre des zéros de $\operatorname{grad}(w + H_a)$ dans $|z| < \varepsilon$ (compté avec leur multiplicité) est égal au degré de l'application

$$\varphi_a: S_\varepsilon \ni z \to \operatorname{grad}(w + H_a)(z)/|\operatorname{grad}(w + H_a)(z)| \in S_1,$$

où $S_\alpha = \{z \in \mathbf{C}^n: |z| = \alpha\}$ (Lemme 2B, p. 112 **[19]**). Evidemment toutes les φ_a sont homotopes pour $a \in B_d(a_0)$ et par conséquent, l'hypothèse–degré $\varphi_a = \mu(w + H_a) =$ constant dans $\mathbf{C}^N$–implique que pour tout $a \in B_d(a_0)$ le jet $w + H_a$ n'a pas de points critiques dans $0 < |z| < \varepsilon$.

(d) $\Rightarrow$ (b) a été démontré dans **[6]** et, de toute façon, résulte de la Proposition 1 et de la Remarque 8(b), §2.

Lemme 4. *Soit $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$ et*

$$\mu(w) = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}/(\partial w/\partial z_1, \ldots, \partial w/\partial z_n) = \infty.$$

Alors pour tout $k \in \mathbf{N}$ il existe $f \in \mathcal{H}$ tel que $j^r(f) = w$ et $k < \mu(f) < \infty$.

En particulier il existe $f, g \in \mathcal{H}$ tels que $j^r(f) = j^r(g) = w$ et $\mu(f) < \mu(g) < \infty$.

Preuve. Notons $\alpha_s = \dim_{\mathbf{C}} \mathcal{H}/(\Delta(w) + \mathfrak{M}^{s+1})$, où $\Delta(w) = (\partial w/\partial z, \ldots, \partial w/\partial z_n)$ et $\mathfrak{M}$ l'idéal maximal de $\mathcal{H}$. On a $\alpha_s \to \infty$ si $s \to \infty$; sinon on aurait $\mu(w) < \max\{\alpha_s: s \in \mathbf{N}\}$.

Prenons $\varphi \in \mathfrak{M}^{s_0+2}$ où $s_0 \in \mathbf{N}$ est tel que $\alpha_{s_0} > k$ et $\mu(w + \varphi) < \infty$. Alors pour $f = w + \varphi$ on a

$$\begin{aligned} k \leqslant \alpha_{s_0} &= \dim \mathcal{H}/(\Delta(w) + \mathfrak{M}^{s_0+1}) \\ &= \dim \mathcal{H}/(\Delta(f) + \mathfrak{M}^{s_0+1}) \leqslant \mu(f) < \infty. \end{aligned}$$

Le théorème suivant joue un rôle essentiel dans la démonstration (a) $\Rightarrow$ (c).

Théorème [Teissier [**15**, Théorème 3.3]]. *Soient $f, g \in \mathcal{H}$, $\mu(f) < \infty$, $\mu(g) < \infty$. Supposons qu'il existe un homéomorphisme local $h: (\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}^n, 0)$ tel que $h(f^{-1}(0)) = g^{-1}(0)$. Alors $\mu(f) = \mu(g)$.*

Démontrons maintenant (a) $\Rightarrow$ (c).

Le Lemme 4 et le dernier théorème impliquent que pour un jet $w \in J^r_{\mathbf{C}}(n, 1)$ strictement v-suffisant, on a $\mu(w) < \infty$. Prenons $f \in \mathcal{H}(n)$ avec $j^r(f) = w$ et montrons que $\mu(f) = \mu(w)$. Grâce à l'hypothèse (a) et au théorème de Teissier, il suffit de montrer que $\mu(f) < \infty$. Supposons au contraire $\mu(f) = \infty$ et prenons $s \geqslant r$. Le s-jet $j^s(f)$ est strictement v-suffisant dans $\mathcal{H}$, donc $\mu(j^s(f)) < \infty$ d'où en appliquant à nouveau le théorème de Teissier, on a pour tout $s \geqslant r$, $\mu(j^s(f)) = \mu(w)$. Ceci implique que $\mu(f) < \infty$. La démonstration du Théorème 3 est complète, puisque l'implication (b) $\Rightarrow$ (a) est triviale.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE 2. L'ensemble

$$A = \{(w, v) \in (J_{\mathbf{C}}^{r+1}(n, 1))^2 : j^r(w) = j^r(v) \text{ et } \mu(w) \neq \mu(v)\}$$

est évidemment constructible. D'après le Théorème 3, l'ensemble Ω des r-jets complexes C^0-suffisant dans $\mathcal{K}$ est égal à $J_{\mathbf{C}}^r(n, 1) \setminus p(A)$, où p: $(J_{\mathbf{C}}^{r+1}(n, 1))^2 \ni (w, u) \to j^r(w) \in J_{\mathbf{C}}^r(n, 1)$.

5. Propriétés quantitatives des ensembles semi-algébriques et démonstration du Théorème 4.

DÉFINITION. Une application surjective et continue π: $E \to B$ est une *fibration triviale* compatible avec la famille $E_1, \ldots, E_s$ des sous-ensembles de E, s'il existe un espace topologique M, une famille $M_i \subset M$, $i = 1, \ldots, s$, et un homéomorphisme h: $B \times M \to E$ tels que $\pi \cdot h(b, m) = b$ et $E_i = h(B \times M_i)$, $i = 1, \ldots, s$.

THÉORÈME (VARCHENKO [24], WALLACE [26]). *Soient $M \subset \mathbf{R}^l$ un ensemble algébrique et $P_i(x, t)$, $Q_j^i(x, t)$, $j = 1, \ldots, m_i$, $i = 1, \ldots, s$, des polynômes appartenant à $\mathbf{R}[x_1, \ldots, x_n, t_1, \ldots, t_l]$. Soient*

$$E_i = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times M : P_i(x, t) = 0, Q_j^i(x, t) > 0, j = 1, \ldots, m_i\}$$

$i = 1, \ldots, s$, et π: $\mathbf{R}^n \times M \to M$ la projection canonique. Alors il existe un ensemble algébrique $A \subsetneqq M$ tel que pour toute composante connexe W de $M \setminus A$, la projection π: $\mathbf{R}^n \times W \to W$ est une fibration triviale compatible avec la famille $\{(\mathbf{R}^n \times W) \cap E_i\}_{i=1,\ldots,s}$.

Nous allons voir plus loin que la possibilité donnée par ce théorème, d'étudier simultanément le comportement des familles finies $\{E_i\}$, est essentielle pour les applications. Pour pouvoir calculer le nombre $\beta(n, p; s)$ du Théorème 4, nous aurons besoin d'une version plus précise du théorème de fibration.

DÉFINITION [1]. On dit qu'un ensemble semi-algébrique $E \subset \mathbf{R}^n$ est de type $A_n(k, p)$ (ou que $E \in A_n(k, p)$) s'il est défini par k polynômes de degré $< p$.

THÉORÈME 6. *Si dans l'énoncé du théorème de Varchenko-Wallace, l'ensemble $M \in A_l(k, p)$ et $E_i \in A_{l+n}(k, p)$, $i = 1, \ldots, s$, alors il existe une partition de M en α sous-variétés analytiques, semi-algébriques et connexes $\{W_j\}_{j=1,\ldots,\alpha}$, tels que pour tout W_j la restriction $\pi | \mathbf{R}^n \times W_j$: $\mathbf{R}^n \times W_j \to W_j$ soit une fibration triviale compatible avec la famille $\{(\mathbf{R}^n \times W_j) \cap E_i\}_{i=1,\ldots,s}$. Le nombre $\alpha = \alpha(n, l, p, s)$ ne dépend que de n, l, k et s et s'exprime de façon effective en fonction de n, l, k et s.*

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 6. Supposons qu'il existe une suite $M = A_0 \supsetneqq A_1 \supsetneqq \cdots \supsetneqq A_m = \varnothing$ d'ensembles algébriques dont on peut calculer le type et dont la longueur m s'exprime explicitement en fonction de n, l, k et

s et telle que pour chaque composante connexe W de $A_i \setminus A_{i+1}$, $\pi|\mathbf{R}^n \times W$ est une fibration triviale compatible avec la famille $\{(\mathbf{R}^n \times W) \cap E_i\}_{i=1,\ldots,s}$. Cela suffit pour calculer le nombre α, puisque le nombre des composantes connexes de chaque ensemble $A_i \setminus A_{i+1}$ (dont le type $A_l(k', p')$ est connu) s'exprime explicitement en fonction de l, k' et p' [1] et puisque d'après [1], nous savons qu'un ensemble semi-algébrique du type $A_l(k', p')$ admet une partition en (au plus) $\beta(l, k', p')$ sous-variétés analytiques lisses semi-algébriques et connexes; $\beta(l, k', p')$ étant explicitement calculable en fonction de l, k' et p'.

Pour montrer l'existence d'une telle suite $\{A_i\}$, il suffit de savoir faire deux choses:

(1) calculer le type de l'ensemble A qui apparaît dans le théorème de Varchenko-Wallace, en fonction de n, l, p et s, sous l'hypothèse que M est irréductible;

(2) étant donné un ensemble algébrique Z du type $A_n(k, p)$, calculer le nombre maximal des composantes irréductibles de Z et leur type.

La démonstration de Wallace [26] du théorème de Varchenko-Wallace permet de réaliser (1); (2) résulte du théorème suivant:

THÉORÈME 7. *Le nombre maximal des composantes irréductibles d'un ensemble algébrique (réel ou complexe) M du type $A_n(k, p)$, ainsi que le type de ses composantes, s'exprime de façon effective en fonction de n, k et p.*

PREUVE. Il suffit de montrer le théorème dans le cas complexe (le cas réel en résulte par complexification). Dans [1] nous avons montré qu'un ensemble algébrique M (ou plus généralement semi-algébrique), du type $A_n(k, p)$, admet une partition $M = \bigcup_i V_i$ en (au plus) $\alpha = \alpha(n, k, p)$ sous-ensembles semi-algébriques V_i du type $A_n(k', p')$, chacun des V_i étant une sous-variété analytique lisse et connexe de $\mathbf{R}^n$; les nombres α, k' et p' s'exprimant de façon effective en fonction de n, k et p. Il est évident que le nombre des composantes irréductibles de M ne dépasse pas α.

Il est plus délicat de calculer le type de composants irréductibles M_j de M. Dans le cas complexe, chaque M_j est une réunion des adhérences de certaines des variétés $\{V_i\}$ (remarquons que cela est faux dans le cas réel). Puisque nous connaissons le type de V_i, nous connaissons également le type de l'adhérence $\overline{V_i}$ (Remarque 8 ci-dessous), ce qui est suffisant pour calculer le type de M_j, car le nombre maximal d'exemplaires de V_i est connu.

REMARQUE 8. Si $M \in A_n(k, p)$ et $\pi: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^s$ est la projection linéaire, alors $\pi(M) \in A_s(k', p')$, où k' et p' sont connues explicitement (Théorème 2 [1]). Ceci implique que le type de l'adhérence $\overline{M}$ est déterminé par le type de M, puisque

$$\overline{M} = \mathbf{R}^n \setminus \pi((\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}) \setminus \tilde{\pi}(\{(x, y, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}: \\ y \in M, |x - y| < u\})),$$

où π: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \ni (x, u) \to x \in \mathbf{R}^n$ et $\tilde{\pi}$: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \ni (x, y, u) \to (x, u) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}$.

Nous pouvons maintenant démontrer le Théorème 4. Considérons les sous-ensembles algébriques E_i, $i = 1, 2, 3$, de $\mathbf{R}^n \times J^s(n, p)$ $(n \geqslant p)$ définis par

$$E_1 = \{(x, w) \in \mathbf{R}^n \times J^s(n, p): w(x) = 0\},$$

$$E_2 = \left\{(x, w) \in \mathbf{R}^n \times J^s(n, p): \frac{D(w_1, \ldots, w_p)}{D(x_{i_1}, \ldots, x_{i_p})}(x) = 0, \\ 1 \leqslant i_1 < \cdots < i_p \leqslant n\right\},$$

$$E_3 = \{0\} \times J^s(n, p).$$

Notons π: $\mathbf{R}^n \times J^s(n, p) \to J^s(n, p)$ la projection canonique sur $J^s(n, p)$. D'après le Théorème 6, il existe une partition de $J^s(n, p)$ en $\tilde{\alpha} = \tilde{\alpha}(n, p, s)$ sous-variétés analytiques, semi-algébriques et connexes $J^s = W_1 \cup \cdots \cup W_\alpha$, telle que pour tout $j = 1, \ldots, \alpha$, π: $\mathbf{R}^n \times W_j \to W_j$ est une fibration triviale compatible avec $(\mathbf{R}^n \times W_j) \cap E_i$, $i = 1, 2, 3$.

L'ensemble $J^s_\Sigma(n, p)$ des s-jets ayant une singularité isolée en $0 \in \mathbf{R}^n$ est compatible avec la partition $\{W_j\}$, c'est-à-dire ou bien $W_j \cap J^s_\Sigma(n, p) = \varnothing$ ou bien $W_j \subset J^s_\Sigma(n, p)$: en effet si $w_0 \in W_j \cap J^s_\Sigma(n, p)$, alors $0 \in \mathbf{R}^n$ est un point critique isolé de w_0. Dans $\pi^{-1}(w_0)$, le point $(w_0, 0)$ est isolé dans l'ensemble $\pi^{-1}(w_0) \cap E_2$, donc $(w, 0)$ est isolé dans $\pi^{-1}(w) \cap E_2$ pour chaque $w \in W_j$ (puisque la fibration est compatible avec E_2), et par conséquent $w \in J^s_\Sigma(n, p)$. Prenons comme V_j dans le Théorème 4, les W_j tels que $W_j \cap J^s_\Sigma(n, p) \neq \varnothing$. Le fait que la famille $\{w;\ w \in V_j\}$ soit localement triviale résulte de la construction de V_j et du théorème de King:

THÉORÈME (KING [10]). *Supposons que F: $(U \times W, 0 \times W) \to (\mathbf{R}^p, 0)$ soit une application différentiable, U étant un voisinage 0 de $\mathbf{R}^n$, et W un voisinage de 0 de $\mathbf{R}^k$, telle que pour chaque $t \in W$, $F_t(x) = F(x, t)$ n'ait qu'un seul point critique dans U, à savoir $0 \in \mathbf{R}^n$. Supposons qu'il existe une famille continue d'homéomorphismes locaux σ_t: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, $t \in W$, telle que $\sigma_t(F_t^{-1}(0)) = F_0^{-1}(0)$.*

Alors, pour un voisinage W' de $0 \in \mathbf{R}^k$, la famille $\{F_t\}_{t \in W'}$, est triviale.

Question. La famille $\{w: w \in W_j\}$, où W_j sont définis dans la démonstration du Théorème 4, est-elle aussi localement triviale? Autrement dit, le théorème de King est-il valable si au lieu de supposer que 0 est un point critique isolé de f_t, on suppose (en plus de l'hypothèse $\sigma_t(F_t^{-1}(0)) = F_0^{-1}(0)$) que $\sigma_t(C(F_t)) = C(F_0)$, où $C(F_t)$ = l'ensemble des points critiques de F_t? Dans le théorème de King cette condition est trivialement vérifiée car $C(F_t) = \{0\}$.

REMARQUE 9. Le Théorème 6 implique en particulier que le nombre maximal de types topologiques des systèmes de k ensembles semi-algébriques, dont chacun est du type $A_n(p, s)$, est fini et s'exprime explicitement en fonction de k, n, p et s (comparez [7]).

6. Démonstrations des Théorèmes 3 et 5.

PREUVE DU THÉORÈME 3. Si pour un germe holomorphe f: $(\mathbf{C}^n, 0) \to (\mathbf{C}, 0)$ le nombre de Milnor $\mu(f) \leqslant s$, alors f est holomorphiquement équivalent à son $(s + 2)$-jet $j^{s+2}(f)$. Il suffit donc de considérer l'ensemble $J_\Sigma^{s+2}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C})$ des jets complexes d'ordre $s + 2$, ayant une singularité isolée en $0 \in \mathbf{C}^n$. Puisque $J_\Sigma^{s+2}(\mathbf{C}^n, \mathbf{C}) \subset J_\Sigma^{s+2}(\mathbf{R}^{2n}, \mathbf{R}^2)$, le Théorème 3 résulte du Théorème 4.

PREUVE DU THÉORÈME 5. Considérons une famille analytique $\{f_t: (\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^p, 0)\}_{t \in U}$ appartenant à $\mathcal{E}_*^\omega(n, p; s)$; (la démonstration dans le cas différentiable est analogue).

L'application j^s: $U \in x \to j^s(f_t) \in J^s(n, p)$ est analytique et l'image $j^s(U) \subset J_\Sigma^s(n, p)$. Prenons un voisinage U' relativement compact de $0 \in \mathbf{R}^n$, $U' \subset \bar{U}' \subset U$ et définissons $W_i = (j^s)^{-1}(V_i) \cap U'$, où $\{V_i\}_i$ une partition de $J_\Sigma^s(n, p)$ ayant les propriétés définies dans le Théorème 4. Par la Proposition 1, il existe une famille continue d'homéomorphismes σ_t: $(\mathbf{R}^n, 0) \to (\mathbf{R}^n, 0)$, $t \in U'$, telle que $f_t \cdot \sigma_t = j^s(f_t)$; (quitte à diminuer éventuellement U').

Puisque pour $t \in W_j$, la famille $j^r(f_t)$ est C^0 localement triviale (par construction), le théorème en résulte car les W_i sont semi-analytiques comme contre-images des ensembles semi-algébriques par une application analytique (on peut choisir comme P_i un élément quelconque de V_i).

Nous remercions notre ami Claude Bruter de l'aide précieuse qu'il nous a apportée pour la rédaction de cet article.

BIBLIOGRAPHY

1. J. Bochnak, *Quelques propriétés quantitatives des ensembles semi-algébriques*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (4) 2 (1975), 483–496.

2. ______, *Relèvements des jets*, Séminaire Lelong, Lecture Notes in Math., vol. 275, Springer-Verlag, Berlin, 1972, pp. 106–118.

3. J. Bochnak and S. Lojasiewicz, *A converse of the Kuiper-Kuo theorem*, Proc. Liverpool Singularities Sympos. I, Lecture Notes in Math., vol. 192, Springer-Verlag, Berlin, 1971, pp. 254–261.

4. J. Bochnak and T. C. Kuo, *Rigid and finitely V-determined germs of C^∞ mappings*, Canad. J. Math. **25** (1973), 727–732.

5. P. Church and K. Lamotke, *Non trivial polynomial isolated singularities*, Indag. Math. **37** (1975), 149–153.

6. S. H. Chang and Y. C. Lu, *On C^0-sufficiency of complex jets*, Canad. J. Math. **25** (1973), 874–880.

7. T. Fukuda, *Types topologiques des polynômes*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **46** (1976), 87–106.

8. H. King, *Real analytic germs and their varieties at isolated singularities*, Invent. Math. **37** (1976), 193–199.

9. ______, *Topological type of isolated critical points*, Ann. of Math. **107** (1978), 385–397.

10. ______, *Topological type of families of singularities* (preprint).

11. W. Kucharz, *A characterisation of C^∞-sufficient k-jets*, Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976), 419–423.

12. N. Kuiper, *C^1-equivalence of functions near isolated critical points*, Sympos. Infinite Dimensional Topology (Baton Rouge, 1967), Princeton Univ. Press, Princeton, N. J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1972, pp. 199–218.

13. T. C. Kuo, *Characterisations of v-sufficiency of jets*, Topology **11** (1972), 115–131.

14. ______, *On C^0-sufficiency of jets of potential functions*, Topology **8** (1969), 167–171.

15. D. T. Lê, *Topologie des singularités*, Singularité à Cargèse, Astérisque 7 et 8, Paris, 1973.

16. J. Mather, *Stability of C^∞-mappings*. III, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **35** (1968), 279–308.

17. ______, Unpublished notes on right equivalence.

18. ______, *Some non-finitely determined map-germs*, Symposia Mathematica, Vol. II, Academic Press, New York, 1969, pp. 303–320.

19. J. Milnor, *Singular points of complex hypersurfaces*, Ann. of Math. Studies, no. 61, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1968.

20. F. Takens, *A note on sufficiency of jets*, Invent. Math. **13** (1971), 225–231.

21. R. Thom, *Local properties of differentiable mappings*, Differential Analysis, Oxford Univ. Press, London, 1964, pp. 191–202.

22. J.-Cl. Tougeron, *Idéaux de fonctions différentiables*, Springer-Verlag, Berlin, 1972.

23. ______, *Idéaux de fonctions différentiables*. I, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **18** (1968), 177–240.

24. A. Varchenko, *Theorems on the topological equisingularity of families of algebraic varieties and families of polynomial mappings*, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. **36** (1972), 957–1019.

25. ______, *Algebro-geometrical equisingularity and local topological classification of smooth mappings*, Proc. Internat. Congr. Math., Vancouver, Canad. Math. Soc., Montréal, 1974, pp. 427–431.

26. A. H. Wallace, *Linear sections of algebraic varieties*, Indiana Univ. Math. J. **20** (1970/71), 1153–1162.

27. T. Gaffney, *On the order of determination of a finitely determined germ*, Invent. Math. **37** (1976), 83–92.

SECTION DE MATHÉMATIQUES, UNIVERSITÉ DE GENÈVE, 2-4, RUE DE LIÈVRE, 1211-GENÈVE 24, SUISSE